

Kapitel VIII

Der zentrale Grenzwertsatz

Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik I

Wintersemester 2003/2004 und Sommersemester/Wintersemester 2006/2007

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

25.11.03 und 27.10.06

Übersicht zu Kapitel VIII :

Dreiecksschemata aus zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen 8.1–8.2

Asymptotische Vernachlässigbarkeit; Bedingungen von Lindeberg, Feller, Lyapunov 8.3–8.4

Beispiel: iid ZV 8.5

Zentraler Grenzwertsatz in Dimension $d = 1$ 8.6–8.7

hinreichende und notwendige Bedingungen: Satz von Lindeberg-Feller 8.8

Bemerkungen 8.9

Zentraler Grenzwertsatz in \mathbb{R}^d 8.10

8.1 Definition : Ein *Dreiecksschema* $(X_{n,j})_{j=1,\dots,k_n; n=1,2,\dots}$ von zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen ist ein System

$$\begin{array}{ccccccc} X_{1,1} & \cdots & & & & & X_{1,k_1} \\ X_{2,1} & \cdots & & & & & X_{2,k_2} \\ \vdots & & & & & & \ddots \\ X_{n,1} & \cdots & & & & & X_{n,k_n} \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{array}$$

von Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) , mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, mit den folgenden Eigenschaften:

- i) für die Folge $(k_n)_n$ der Zeilenlängen gilt $k_n \uparrow \infty$,
- ii) in jeder Zeile $n \in \mathbb{N}$ sind die Zufallsvariablen $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ unabhängig unter P ,
- iii) es gilt $X_{n,j} \in L^2(P)$ für alle $1 \leq j \leq k_n$, alle $n \in \mathbb{N}$.

In einem Dreiecksschema zeilenweise unabhängiger L^2 -Variablen bezeichne

$$\begin{aligned} \mu_{n,j} &:= E(X_{n,j}), \quad \sigma_{n,j}^2 := \text{Var}(X_{n,j}), \quad 1 \leq j \leq k_n, \quad n \geq 1, \\ s_n &:= \sqrt{\text{Var}(X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n})} = \sqrt{\sigma_{n,1}^2 + \dots + \sigma_{n,k_n}^2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Ein Dreiecksschema mit

$$\mu_{n,j} = 0, \quad 1 \leq j \leq k_n, \quad n \geq 1$$

nennt man *zentriert*; es heißt *standardisiert* falls

$$s_n^2 = 1 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

8.2 Beispiel: Sei $(Y_j)_{j \geq 1}$ eine Folge von iid ZV auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit $E(Y_1^2) < \infty$.

a) $(Y_j)_{j \geq 1}$ liefert via

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & Y_1 \\ & & & & & & Y_1 & Y_2 \\ & & & & & & \vdots & & \ddots \\ & & & & & & Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \\ & & & & & & \vdots & & & \ddots \end{array}$$

ein Dreiecksschema zeilenweise unabhängiger L^2 -Variabler.

b) Wende mit $\mu := E(Y_1)$ und $\sigma^2 := \text{Var}(Y_1)$ auf die n -te Zeile des Dreiecksschemas die lineare Transformation $y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{y - \mu}{\sigma}$ an und definiere

$$X_{n,j} := \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{Y_j - \mu}{\sigma}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad n \geq 1.$$

Das so entstandene Dreiecksschema $(X_{n,j})_{j=1,\dots,n; n=1,2,\dots}$ (mit $k_n = n$) ist zentriert und standardisiert.

c) In der 'Einführung in die Stochastik' lernt man den Satz von de Moivre-Laplace (entstanden um 1733) kennen, der im Spezialfall binomialverteilter ZV $(Y_j)_{j \geq 1}$ iid $\sim \mathcal{B}(1, p)$ zeigt

$$P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{Y_j - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq b \right) \longrightarrow \Phi(b), \quad n \rightarrow \infty$$

für jedes $b \in \mathbb{R}$; dabei bezeichnet $\Phi(t) = \mathcal{N}(0, 1)((-\infty, t])$ die Verteilungsfunktion der eindimensionalen Standardnormalverteilung. Wegen 6.12 ist dies – im Spezialfall binomialverteilter iid ZV – eine Aussage über *Verteilungskonvergenz von Zeilensummen* in einem zentrierten und standardisierten Dreiecksschema. \square

Ziel dieses Kapitels ist es, hinreichende (und notwendige) Bedingungen anzugeben, unter denen Zeilensummen in zentrierten und standardisierten Dreiecksschemata aus zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen für $n \rightarrow \infty$ schwach in \mathbb{R} gegen die Standardnormalverteilung konvergieren. Sätze dieser Bauart – wie sie auch in viel allgemeineren Situationen, etwa in stochastischen Prozessen, formuliert werden können – bezeichnet man mit dem Namen *zentraler Grenzwertsatz*.

8.3 Definition: Betrachte ein Dreiecksschema $(X_{n,j})_{j=1,\dots,k_n; n=1,2,\dots}$ aus zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen, und mögliche Eigenschaften dieses Schemas.

i) Die *asymptotische Vernachlässigbarkeitsbedingung* (AV) verlangt

$$\forall \varepsilon > 0 : \max_{1 \leq j \leq k_n} P \left(\left| \frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right| > \varepsilon \right) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ii) Die *Feller-Bedingung* (FE) verlangt

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} \frac{\sigma_{n,j}^2}{s_n^2} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

iii) Die *Lindeberg-Bedingung* (LIN) verlangt

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ fest: } L_n(\varepsilon) := \sum_{j=1}^{k_n} E \left(\left(\frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right)^2 1_{\left\{ \left| \frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right| > \varepsilon \right\}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

iv) Die *Lyapunov-Bedingung* (LY) verlangt

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \delta > 0 \text{ so daß } X_{n,j} \in L^{2+\delta}(P) \text{ für alle } j, n, \text{ und es gilt} \\ \sum_{j=1}^{k_n} E \left(\left| \frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right|^{2+\delta} \right) \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Beachte: alle diese Bedingungen sind invariant unter linearen Transformationen, die auf alle Variablen *einer ganzen Zeile* des Dreiecksschemas angewandt werden.

8.4 Hilfssatz: In einem Dreiecksschema $(X_{n,j})_{j=1,\dots,k_n; n=1,2,\dots}$ aus zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen gilt für die in 8.3 definierten Eigenschaften:

- a) (LIN) \implies (FE) \implies (AV);
 b) falls sogar $X_{n,j} \in L^{2+\delta}(P)$ für alle j, n : (LY) \implies (LIN).

Beweis: Da $X_{n,j} \in L^2(P)$ für alle j, n , gilt für jedes feste $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{n,j}^2 &= \text{Var}(X_{n,j}) = s_n^2 E \left(\left(\frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right)^2 \right) \\ &\leq s_n^2 \left[\varepsilon^2 + E \left(\left(\frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right)^2 1_{\left\{ \left| \frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right| > \varepsilon \right\}} \right) \right] \end{aligned}$$

und damit

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} \frac{\sigma_{n,j}^2}{s_n^2} \leq \varepsilon^2 + L_n(\varepsilon).$$

Dies zeigt (LIN) \implies (FE). Die elementare Chebychev-Ungleichung

$$P(|X_{n,j} - \mu_{n,j}| > \varepsilon s_n) \leq \frac{\sigma_{n,j}^2}{\varepsilon^2 s_n^2}$$

liefert (FE) \implies (AV). Unter der Zusatzvoraussetzung $X_{n,j} \in L^{2+\delta}(P)$ für alle j, n folgt aus

$$|y|^2 1_{\{|y|>\varepsilon\}} \leq \text{cst}(\delta, \varepsilon) |y|^{2+\delta}, \quad y \in \mathbb{R}$$

die Implikation (LY) \implies (LIN). □

8.5 Beispiel: Betrachte eine Folge $(Y_j)_{j \geq 1}$ von iid ZV mit $E(Y_1^2) < \infty$ wie in 8.2 als Dreiecksschema zeilenweise unabhängiger L^2 -Variablen, entweder in der Form aus 8.2 a) oder in der zentrierten und standardisierten Form aus 8.2 b):

$$\begin{array}{ccccccc} Y_1 & & & & X_{1,1} & & \\ Y_1 & Y_2 & & & X_{2,1} & X_{2,2} & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n & X_{n,1} & X_{n,2} & \dots & X_{n,n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \ddots \end{array}$$

mit

$$X_{n,j} := \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{Y_j - \mu}{\sigma}, \quad \mu := EY_1, \quad \sigma^2 := \text{Var}(Y_1).$$

a) Dann gilt die Lindeberg-Bedingung (LIN) (und damit nach 8.4 auch (FE) und (AV)):

Mit den Bezeichnungen aus 8.1 für $(X_{n,j})_{j=1,2,\dots;n=1,2,\dots}$ hat man

$$s_n = 1 \text{ für alle } n, \quad \mu_{n,j} = 0 \text{ für alle } n, j,$$

also schreibt sich der in der Lindeberg-Bedingung zu betrachtende Ausdruck in jeder der Formen

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^n E \left(\left(\frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right)^2 1_{\{|X_{n,j} - \mu_{n,j}| > \varepsilon s_n\}} \right) = \sum_{j=1}^n E \left((X_{n,j})^2 1_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon\}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n E \left(\left(\frac{Y_j - \mu}{\sqrt{n} \sigma} \right)^2 1_{\left\{ \left| \frac{Y_j - \mu}{\sqrt{n} \sigma} \right| > \varepsilon \right\}} \right) = \frac{1}{\sigma^2} E \left((Y_1 - \mu)^2 1_{\{|Y_1 - \mu| > \varepsilon \sigma \sqrt{n}\}} \right). \end{aligned}$$

Da $Y_1 \in L^2(P)$, strebt der letzte Ausdruck gegen 0 für $n \rightarrow \infty$: damit ist (LIN) nachgewiesen.

b) Gilt sogar $Y_1 \in L^{2+\delta}(P)$ für ein $\delta > 0$, gilt auch die Lyapunov-Bedingung (LY) wegen

$$\sum_{j=1}^n E \left(\left| \frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right|^{2+\delta} \right) = n \cdot E \left(\left| \frac{Y_1 - \mu}{\sqrt{n} \sigma} \right|^{2+\delta} \right) = n^{-\delta/2} \cdot \text{cst} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. □

Nun geben wir die erste Formulierung des 'zentralen Grenzwertsatzes':

8.6 Hauptsatz: Sei $(X_{n,j})_{j=1,\dots,k_n;n=1,2,\dots}$ ein Dreiecksschema aus zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen. Erfüllt dieses Dreiecksschema die Lindeberg-Bedingung (LIN), so gilt

$$\mathcal{L} \left(\sum_{j=1}^{k_n} \frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \mid P \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \mathcal{N}(0, 1)$$

mit $\mu_{n,j} = E(X_{n,j})$ und $s_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \text{Var}(X_{n,j})$.

Beweis: 1) Wir betrachten o.E. ein zentriertes und standardisiertes Dreiecksschema $(X_{n,j})_{n,j}$. Die Lindeberg-Bedingung (und die anderen in 8.4 betrachteten Bedingungen) sind invariant unter dieser Umformung. Im Fall

$$(*) \quad \mu_{n,j} = 0 \quad \forall n, j, \quad s_n^2 = \sigma_{n,1}^2 + \dots + \sigma_{n,k_n}^2 = 1 \quad \forall n \geq 1$$

beweisen wir dann asymptotische Normalität der Zeilensummen

$$\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \xi, \quad \xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

unter der Voraussetzung (LIN):

$$L_n(\varepsilon) := \sum_{j=1}^{k_n} E \left(X_{n,j}^2 1_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon\}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Schreibe $Q_{n,j} = \mathcal{L}(X_{n,j}|P)$, sei $\varphi_{n,j}$ die zugehörige charakteristische Funktion.

2) Wegen $X_{n,j} \in L^2(P)$ ist $\varphi_{n,j}$ zweimal stetig differenzierbar an der Stelle 0:

$$\varphi_{n,j}^{(r)}(t) = \int (ix)^r e^{itx} Q_{n,j}(dx), \quad \varphi_{n,j}^{(r)}(0) = i^r E(X_{n,j}^r), \quad r = 1, 2,$$

siehe 7.15. Wegen der Standardisierung (*)

$$\varphi'_{n,j}(0) = 0, \quad \varphi''_{n,j}(0) = -\sigma_{n,j}^2$$

liefert das eine Entwicklung der charakteristischen Funktion $\varphi_{n,j}$ an der Stelle 0

$$\varphi_{n,j}(t) = 1 - \sigma_{n,j}^2 \cdot \frac{t^2}{2} + r_{n,j}(t) \cdot \frac{t^2}{2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

mit Resttermen (siehe 7.16)

$$|r_{n,j}(t)| \leq \sup_{\eta \in [0,1]} |\varphi''_{n,j}(\eta t) - \varphi''_{n,j}(0)| \leq \sup_{\eta \in [0,1]} \int x^2 |e^{i\eta t x} - 1| Q_{n,j}(dx).$$

Für festes $t \in \mathbb{R}$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$, so daß

$$|x| \leq \delta \implies \sup_{\eta \in [0,1]} |e^{i\eta t x} - 1| < \varepsilon,$$

damit gilt

$$|r_{n,j}(t)| \leq \varepsilon \sigma_{n,j}^2 + 2 \int_{\{|x| > \delta\}} x^2 Q_{n,j}(dx)$$

und damit wegen Standardisierung (*)

$$\sum_{j=1}^{k_n} |r_{n,j}(t)| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2 + 2 \sum_{j=1}^{k_n} \int x^2 1_{\{|x| > \delta\}} Q_{n,j}(dx) = \varepsilon + 2L_n(\delta), \quad \delta = \delta(t, \varepsilon).$$

Hierbei ist $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen (LIN) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\delta) = 0$ für jedes $\delta > 0$. Also ist gezeigt

$$(+) \quad \sum_{j=1}^{k_n} |r_{n,j}(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3) Wir assoziieren zu dem gegebenen Dreiecksschema $(X_{n,j})_{j=1,\dots,k_n; n=1,2,\dots}$ ein neues Dreiecksschema $(Y_{n,j})_{j=1,\dots,k_n; n=1,2,\dots}$ aus normalverteilten zeilenweise unabhängigen ZV, so daß jeweils die ersten beiden Momente übereinstimmen:

$$\begin{cases} Y_{n,1}, \dots, Y_{n,k_n} & \text{sind unabhängig für jedes } n \\ Y_{n,j} = \mathcal{N}(0, \sigma_{n,j}^2), & 1 \leq j \leq k_n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

mit zugehörigen charakteristischen Funktionen $\psi_{n,j}(t) := \int e^{itx} \mathcal{N}(0, \sigma_{n,j}^2)(dx)$. Wie in 2) gilt

$$\begin{aligned} \psi_{n,j}(t) &= 1 - \sigma_{n,j}^2 \frac{t^2}{2} + \tilde{r}_{n,j}(t) \frac{t^2}{2}, \quad t \in \mathbb{R} \\ |\tilde{r}_{n,j}(t)| &\leq \varepsilon \sigma_{n,j}^2 + 2 \int_{\{|x|>\delta\}} x^2 \mathcal{N}(0, \sigma_{n,j}^2)(dx), \end{aligned}$$

wobei die übliche Skalierungseigenschaft für Normalverteilungen zeigt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|x|>\delta\}} x^2 \mathcal{N}(0, \sigma_{n,j}^2)(dx) &= \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2 \int_{\{|x|>\delta/\sigma_{n,j}\}} x^2 \mathcal{N}(0, 1)(dx) \\ &\leq 1 \cdot \int_{\{|x|>\delta/(\max_{j=1,\dots,k_n} \sigma_{n,j})\}} x^2 \mathcal{N}(0, 1)(dx). \end{aligned}$$

Nach 8.4 gilt aber (LIN) \implies (FE), und die Feller-Bedingung mit Normierung (*) zeigt

$$\max_{j=1,\dots,k_n} \sigma_{n,j} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also verschwindet das letzte Integral für $n \rightarrow \infty$. Zusammen erhält man also

$$(+++) \quad \sum_{j=1}^{k_n} |\tilde{r}_{n,j}(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

4) Der Vergleich beider Dreiecksschemata schließt nun den Beweis ab. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Wegen (*) und wegen der Faltungseigenschaft von Normalverteilungen gilt

$$e^{-\frac{1}{2}t^2} = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \varphi_{\mathcal{N}(0, \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2)}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^{k_n} Y_{n,j}}(t) = \prod_{j=1}^{k_n} \psi_{n,j}(t).$$

Wegen zeilenweise Unabhängigkeit im Dreiecksschema $(X_{n,j})_{j=1,\dots,k_n; n=1,2,\dots}$ hat man

$$\varphi_{\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}}(t) = \prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{n,j}(t).$$

Für Punkte $z_1, \dots, z_k, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_k$ in der abgeschlossenen Einheitscheibe in \mathcal{C} gilt die Ungleichung

$$\left| \prod_{j=1}^{k_n} z_j - \prod_{j=1}^{k_n} \tilde{z}_j \right| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |z_j - \tilde{z}_j|,$$

woraus man sofort schließt

$$|e^{-\frac{1}{2}t^2} - \varphi_{\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}}(t)| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{n,j}(t) - \psi_{n,j}(t)| \leq \frac{t^2}{2} \left(\sum_{j=1}^{k_n} |r_{n,j}(t)| + \sum_{j=1}^{k_n} |\tilde{r}_{n,j}(t)| \right).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung verschwindet aber für $n \rightarrow \infty$ nach (+) und (++). Man hat also punktweise Konvergenz auf \mathbb{R} der charakteristischen Funktionen $\varphi_{\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}}(\cdot)$ gegen die charakteristische Funktion der Standardnormalverteilung. Nach Stetigkeitssatz 7.10 ist damit die in Schritt 1) behauptete asymptotische Normalität nachgewiesen. \square

Die einfachste Art, diesen Satz – unter Benutzung von 8.5 a) – anzuwenden, ist

8.7 Korollar: Für reellwertige iid ZV $(Y_j)_j$ mit endlichen zweiten Momenten gilt

$$\mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma} \mid P \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

wobei $\mu = E(Y_1)$ und $\sigma^2 = \text{Var}(Y_1)$.

Der Satz von deMoivre und Laplace war ein Vorläufer dieser Aussage, vgl. 8.2 c) und 6.12.

Zu einer anschaulichen Interpretation der Lindeberg-Bedingung kommt man, wenn man die Variablen der n -ten Zeile eines (zentrierten und standardisierten) Dreiecksschemas 8.1 als Sprunghöhen in einem zeitskalierten Random Walk

$$t \longrightarrow S_t^{(n)} := \sum_{j=1}^{\lfloor t \cdot k_n \rfloor} X_{n,j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

auffaßt: nach Voraussetzung sind alle Sprunghöhen L^2 -Variablen, und (LIN) garantiert, daß in der Asymptotik $n \rightarrow \infty$ der Einfluß 'großer' Sprünge im Pfad von $S^{(n)}$

$$X_{n,k} 1_{\{|X_{n,k}| > \varepsilon\}}, \quad 1 \leq k \leq k_n$$

(Sprünge mit Sprunghöhe $|\cdot| > \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest) in einem L^2 -Sinn verschwindet.

Im nächsten Satz betrachten wir die Bedingungen für asymptotische Normalität der Zeilensummen in Satz 8.6 genauer. Ohne Zweifel kann asymptotische Normalität der Zeilensummen auch

ohne Lindeberg-Bedingung gelten, wie das triviale Beispiel

$$\forall n \geq 1: \quad X_{n,1} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad X_{n,2} = \dots = X_{n,k_n} = 0 \quad P\text{-fs}$$

zeigt. In Dreiecksschemata aus 'gleichmäßig kleinen' zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen ist (LIN) jedoch notwendig und hinreichend für asymptotische Normalität der Zeilensummen.

8.8 Satz von Lindeberg-Feller: Sei $(X_{n,j})_{j=1,\dots,k_n; n=1,2,\dots}$ ein Dreiecksschema aus zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen. Betrachte die Eigenschaft (ZSK)

$$(ZSK) \quad \text{es gilt für } n \rightarrow \infty: \quad \mathcal{L} \left(\sum_{j=1}^{k_n} \frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \mid P \right) \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1)$$

mit $\mu_{n,j}$ und s_n wie in 8.1. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

- i) es gilt (LIN),
- ii) es gilt (ZSK) und (FE),
- iii) es gilt (ZSK) und (AV).

Beweis: Nach Satz 8.6 und Hilfssatz 8.4 ist nur noch die Implikation iii) \implies i) zu zeigen. Die ZV $X_{n,j}$ habe Verteilung $Q_{n,j} = \mathcal{L}(X_{n,j}|P)$ und charakteristische Funktion $\varphi_{n,j}$, für alle n, j ; wir arbeiten wie im Beweis von 8.6 mit der Standardisierung

$$(*) \quad \mu_{n,j} = 0 \quad \forall n, j, \quad s_n^2 = \sigma_{n,1}^2 + \dots + \sigma_{n,k_n}^2 = 1 \quad \forall n \geq 1.$$

1) Schreibe $\varphi_{n,j}(t) = \int \cos(tx)Q_{n,j}(dx) + i \int \sin(tx)Q_{n,j}(dx)$ und betrachte für $t > 0$

$$\tilde{L}_n(t) := 1 - \frac{2}{t^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int (1 - \cos tx) Q_{n,j}(dx) = 1 - \frac{2}{t^2} \sum_{j=1}^{k_n} \operatorname{Re}(1 - \varphi_{n,j}(t)).$$

Der Beweisplan ist der folgende. In Schritt 3) unten werden wir zeigen, daß (AV) und (ZSK) zusammen die Aussage

$$(+)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{L}_n(N) = 0 \quad \text{für jedes feste } N \in \mathbb{N}$$

implizieren. Zugleich wird aber gelten (siehe Schritt 2) unten)

$$(++)$$

$$\text{für beliebiges } \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}: \quad L_n(\varepsilon) \leq \tilde{L}_n(N) + 4 \frac{1}{\varepsilon^2 N^2}.$$

Zusammen ergeben (+) und (++) die gewünschte Aussage

$$(AV) + (ZSK) \implies (LIN).$$

2) Der Beweis von (++) ist elementar. Man hat wegen der Standardisierung (*)

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{k_n} E \left(|X_{n,j}|^2 1_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon\}} \right) = \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} x^2 Q_{n,j}(dx) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2 - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} x^2 Q_{n,j}(dx) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} x^2 Q_{n,j}(dx) \\ &\leq 1 - \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} (1 - \cos Nx) Q_{n,j}(dx) \\ &= \tilde{L}_n(N) + \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} (1 - \cos Nx) Q_{n,j}(dx) \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Abschätzung Hilfssatz 7.3 a) benutzt wurde:

$$(1 - \cos tx) = -\operatorname{Re}(e^{itx} - 1 - itx) \leq |e^{itx} - 1 - itx| \leq \frac{|tx|^2}{2}, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe der trivialen Ungleichung

$$(1 - \cos Nx) 1_{\{|x| > \varepsilon\}} \leq 2 1_{\{|x| > \varepsilon\}} \leq \frac{2}{\varepsilon^2} x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

schätzt man in der Ungleichungskette oben weiter ab

$$\frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} (1 - \cos Nx) Q_{n,j}(dx) \leq \frac{4}{N^2 \varepsilon^2} \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2 = \frac{4}{N^2 \varepsilon^2}$$

und erhält (++).

3) Als Vorbereitung auf den Beweis von (+) zeigen wir zuerst, daß unter (AV) und (*) gilt

$$(\circ) \quad \sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{n,j}(t) - 1|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{gleichmäßig auf kompakten } t\text{-Intervallen.}$$

Mit Hilfssatz 7.3 a) startet man dabei von der Abschätzung

$$|\varphi_{n,j}(t) - 1| \leq \int |e^{itx} - 1| Q_{n,j}(dx) \leq 2 \cdot Q_{n,j}(\{|x| > \delta\}) + \delta t$$

für beliebig kleines $\delta > 0$, in der unter (AV) und (*)

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} Q_{n,j}(\{|x| > \delta\}) = \max_{1 \leq j \leq k_n} E \left(\left| \frac{X_{n,j} - \mu_{n,j}}{s_n} \right| > \delta \right) \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also hat man unter (AV)

$$(\circ\circ) \quad \max_{1 \leq j \leq k_n} |\varphi_{n,j}(t) - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{gleichmäßig auf kompakten } t\text{-Intervallen.}$$

Als nächstes gilt wegen Standardisierung (*) insbesondere $\int x Q_{n,j}(dx) = 0$, daher

$$\varphi_{n,j}(t) - 1 = \int (e^{itx} - 1 - itx) Q_{n,j}(dx)$$

woraus wieder mit Hilfssatz 7.3 a) folgt

$$\sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{n,j}(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} \int x^2 Q_{n,j}(dx) = \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2 = \frac{t^2}{2}.$$

Das bedeutet

$$(\circ\circ\circ) \quad \sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{n,j}(t) - 1| \quad \text{ist beschränkt für } n \rightarrow \infty, \text{ gleichmäßig auf kompakten } t\text{-Intervallen.}$$

Mit Hilfe der trivialen Abschätzung

$$\sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{n,j}(t) - 1|^2 \leq \left(\max_{1 \leq j \leq k_n} |\varphi_{n,j}(t) - 1| \right) \sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{n,j}(t) - 1|$$

ergibt sich (o) aus (o o) und (o o o).

4) Wir zeigen (+). Starte von der Reihenentwicklung für den (Hauptast des) Logarithmus

$$\log(1+z) = z + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} z^r, \quad \forall z \in \mathcal{C} \quad \text{mit } |z| < \frac{1}{2}$$

in \mathcal{C} , woraus mit Hilfe der geometrischen Reihe die Abschätzung

$$|\log(1+z) - z| \leq |z|^2, \quad z \in \mathcal{C}, |z| < \frac{1}{2}$$

folgt. Auf jedem kompakten t -Intervall gilt $|\varphi_{n,j}(\cdot) - 1| < \frac{1}{2}$, $1 \leq j \leq k_n$, für schließlich alle n , wegen (o o) in Schritt 3). Also hat man eine Entwicklung

$$\log(\varphi_{n,j}(t)) = \log(1 + (\varphi_{n,j}(t) - 1)) = (\varphi_{n,j}(t) - 1) + R_{n,j}(t)$$

zusammen mit einer Abschätzung der Restterme für hinreichend großes n

$$\sum_{j=1}^{k_n} |R_{n,j}(t)| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{n,j}(t) - 1|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig auf kompakten t -Intervallen, nach (o) in Schritt 3).

Die Voraussetzung (ZSK) bedeutet nach Stetigkeitssatz von P. Lévy (7.10)

$$\prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{n,j}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$. Die logarithmische Entwicklung oben erlaubt, hieraus auf Konvergenz in \mathcal{C}

$$e^{\sum_{j=1}^{k_n} (\varphi_{n,j}(t)-1)} \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

zu schließen. Damit konvergieren aber auch die Beträge

$$\left| e^{\sum_{j=1}^{k_n} (\varphi_{n,j}(t)-1)} \right| = e^{\operatorname{Re}(\sum_{j=1}^{k_n} (\varphi_{n,j}(t)-1))} \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

und man erhält

$$\sum_{j=1}^{k_n} \operatorname{Re}(1 - \varphi_{n,j}(t)) \longrightarrow +\frac{1}{2}t^2 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Nach Definition von $\tilde{L}_n(\cdot)$ bedeutet das aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{L}_n(t) = 0 \quad \text{für jedes } t \neq 0,$$

und die Aussage (+) ist bewiesen. Damit ist der Beweis von Satz 8.8 abgeschlossen. \square

8.9 Bemerkung: a) Die in Kapitel 9 durchgängig gemachte Voraussetzung endlicher zweiter Momente kann im iid Fall noch einmal minimal abgeschwächt werden, siehe Bingham, Goldie und Teugels (1987, S. 346).

b) Ohne Lindeberg-Bedingung entstehen in Dreiecksschemata aus zeilenweise unabhängigen asymptotisch vernachlässigbaren L^2 -Variablen andere Typen von Grenzverteilungen ('Poisson-Mischungen'); siehe Kapitel IX. Ein einfaches Beispiel: sei $(p_n)_n$ eine Folge in $(0, 1)$ mit der Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} n p_n =: \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. Der aus der 'Einführung in die Stochastik' bekannte Poissonsche Grenzwertsatz zeigt schwache Konvergenz in \mathbb{R}

$$\mathcal{B}(n, p_n) \xrightarrow{w} \mathcal{P}(\lambda), \quad n \rightarrow \infty$$

(für diskrete Verteilungen reicht es nach 6.12, die Konvergenz der Massen dieser Verteilungen auf den Einpunktmengen $\{k\}$, $k \in \mathbb{N}_0$, nachzurechnen). Betrachtet man nun das Dreiecksschema

$$\text{für festes } n \geq 1: \quad X_{n,1}, \dots, X_{n,n} \text{ sind iid } \sim \mathcal{B}(1, p_n)$$

aus zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen, so sieht man leicht, daß (AV) und (FE) erfüllt sind, (LIN) aber verletzt ist. Der schwache Limes für zentrierte und standardisierte Zeilensummen in diesem Dreiecksschema ist eine um λ verschobene und um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ gestreckte Poissonvariable mit Parameter λ . \square

Aus dem 'eindimensionalen' zentralen Grenzwertsatz 8.6 und Cramér-Wold 7.12 erhält man abschließend den zentralen Grenzwertsatz für Zufallsvariable mit Werten in $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, nahezu ohne zusätzliche Arbeit:

8.10 Zentraler Grenzwertsatz in \mathbb{R}^d : Betrachte ein zentriertes Dreiecksschema zeilenweise unabhängiger L^2 -Variablen mit Werten in $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

$$(*) \quad (X_{n,j})_{j=1,\dots,k_n, n=1,2,\dots}$$

(d.h.: für jede Komponente $(X_{n,j})_r$ gilt $E((X_{n,j})_r) = 0$ und $E((X_{n,j})_r^2) < \infty$, $1 \leq r \leq d$), und

$$\Lambda = (\Lambda_{r,s})_{1 \leq r,s \leq d}$$

in $\mathbb{R}^{d \times d}$, symmetrisch und nichtnegativ definit. Unter den folgenden Bedingungen i)+ii)

i) (Lindeberg-Bedingung in \mathbb{R}^d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} E\left(|X_{n,j}|^2 1_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon\}}\right) = 0 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

ii) (Standardisierungsbedingung in \mathbb{R}^d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} E((X_{n,j})_r (X_{n,j})_s) = \Lambda_{r,s}, \quad 1 \leq r, s \leq d$$

sind Zeilensummen in (*) asymptotisch normalverteilt: es gilt schwache Konvergenz in \mathbb{R}^d

$$\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0_d, \Lambda), \quad n \rightarrow \infty.$$

Beweis: Nach Cramér-Wold 7.12 ist zu zeigen

$$\text{für } t \in \mathbb{R}^d \text{ beliebig : } t^\top \sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j} \xrightarrow{w} \mathcal{N}\left(0, t^\top \Lambda t\right), \quad n \rightarrow \infty$$

(schwache Konvergenz in \mathbb{R}). Man folgert aus i) (Lindebergbedingung in \mathbb{R}^d) zusammen mit ii) (Standardisierungsbedingung) die Gültigkeit von (LIN) für jedes der Dreiecksschemata

$$Y_{n,j} := t^\top X_{n,j}, \quad 1 \leq j \leq k_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

für das der 'eindimensionale' zentrale Grenzwertsatz 8.6 zusammen mit ii) zeigt

$$\sum_{j=1}^{k_n} Y_{n,j} \xrightarrow{w} \mathcal{N}\left(0, t^\top \Lambda t\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Da $t \in \mathbb{R}^d$ beliebig war, ist der Satz bewiesen. □