Inhalt in Stichworten

Reinhard Höpfner

Vorlesungen Stochastik I+II

2003/04 und 2006/07

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

12.04.07

Kapitel I: Grundbegriffe

A. Einführung : Modellbildung in der Stochastik – Corde de Bertrand

B. σ-Algebren, Dynkin-Systeme, Maße: σ-Algebren – Erzeuger – Dynkin-Systeme – Maße – Wahrscheinlichkeitsmaße – Eindeutigkeitssatz

C. Algebren, Inhalte, Prämaße, Konstruktion von Maßen: Algebren – Inhalte – Prämaße – Fortsetzungssatz

D. Beweis des Fortsetzungssatzes: äußeres Maß und eindeutige Fortsetzbarkeit σ-endlicher Prämaße

E. Meßbare Abbildungen: Meßbare Abbildungen – Bildmaße – meßbare Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^d$ – Faktorisierungslemma

Kapitel II: Integration bezüglich eines Maßes

A. Integrierbarkeit: meßbare numerische Funktionen – Integral einer Elementarfunktion, einer nichtnegativen Funktion – monotone Konvergenz – integrierbare Funktionen und der Raum $L^1(\mu)$ – Bemerkungen zu Riemann- und Lebesgue-Integral

B. Die Räume $L^p(\mu)$, μ-fast sichere Konvergenz, Konvergenz in $L^p(\mu)$: die Räume $L^p(\mu)$ – Hölder-Ungleichung – Lemma von Fatou – μ-fast sichere Konvergenz – Satz von der dominierten Konvergenz – Vollständigkeit von $L^p(\mu)$

C. Endliche Maße μ: drei Konvergenzbegriffe: Beziehungen zwischen fast sicherer, stochastischer und L^p-Konvergenz – Teilfolgenkriterien – gleichgradige Integrierbarkeit

Kapitel III: Lebesgue-Zerlegung von Maßen

Absolutstetigkeit, Singularität – Beispiele – Lebesgue-Zerlegung σ-endlicher Maße – Satz von Radon-Nikodym – Standarddarstellung der Lebesgue-Zerlegung – Dichtequotienten – Transformationsformel für Dichten

Kapitel IV: Produkträume und Produktmaße

A. Endliche Produkte: Produkt-σ-Algebra – Meßbarkeit von Schnitten – Produktmaße – Fubini

B. Unendliche Produkte: Produkt-σ-Algebra – Produktmaß

C. Unabhängigkeit: Unabhängigkeit von Ereignissen, σ-Algebren, Zufallsvariablen – Produktformeln – Produktdichten – Exkurs über Laplace-Transformierte von Maßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ – Exkurs über Multivariate Normalverteilungen – Faltungen und Faltungsformeln

Kapitel V: 0-1-Gesetze, Dreireihensatz, starkes Gesetz der großen Zahlen

A. Terminale $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra und 0-1-Gesetze: Kolmogorovs 0-1-Gesetz – Borel-Cantelli-Lemma

B. Konvergenz von Random Walks: Kolmogorov-Ungleichung – Konvergenzsatz – Zeichenproblem

C. Starkes Gesetz der großen Zahlen: Kronecker-Lemma – Konvergenzsatz – SLLN für iid Folgen – Glivenko-Cantelli

D. Kolmogorov-Dreireihensatz: Kolmogorov-Dreireihensatz – Folgerungen

Kapitel VI: Schwache Konvergenz

A. Wahrscheinlichkeitsmaße auf metrischen Räumen, schwache Konvergenz, stochastische Konvergenz: schwache Konvergenz allgemein – Portmanteau-Theorem – continuous mapping theorem – schwache Konvergenz und P-stochastische Konvergenz

B. Schwache Konvergenz auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ - drei wichtige Sätze: Tableau der Konvergenzarten – Verteilungsgleiche Ersetzung in $\mathbb{R}$ – Straffheit in $\mathbb{R}$ – schwache Konvergenz und Verteilungsfunktionen – Helly'scher Auswahlsatz

C. Verallgemeinerungen (ohne Beweise): Straffheit und Auswahlsatz in vollständigen metrischen Räumen – Verteilungsgleiche Ersetzung in $\mathbb{R}^d$

Kapitel VII: Charakteristische Funktionen

Definition und Grundeigenschaften – Beispiele – d-dimensionale Normalverteilung – Eindeutigkeitssatz – Stetigkeitssatz von P. Lévy – Fourier-Inversion

Kapitel VIII: Der zentrale Grenzwertsatz

Dreiecksschemata von zeilenweise unabhängigen L^2-Variablen – Bedingungen von Lindeberg, Feller, Lyapunov – ZGWS unter Lindeberg-Bedingungen – hinreichende und notwendige Bedingungen: Satz von Lindeberg-Feller – ZGWS in $\mathbb{R}^d$ und Cramér-Wold-Device

Kapitel IX: Unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße und symmetrisch stabile Verteilungen: ein Einblick

'Poisson-Mischungen' – unendliche teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße – Lévy-Chinchine-Formel – Lévy-Maße – symmetrisch stabile Verteilungen – Stabilitätsindex

Kapitel X: Reguläre bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungen

A. Bedingte Erwartungen: Definition – Existenz – Eigenschaften

B. Faktorisierung der bedingten Erwartung: Faktorisierungen – Ausnahmemengen – 'bedingte Wahrscheinlichkeit von $\cdots$ gegeben $X = x$'

C. Reguläre Versionen: Übergangswahrscheinlichkeiten – reguläre Versionen der bedingten Wahrscheinlichkeit – polnische Räume – Existenz regulärer Versionen $P^{Y|\mathcal{C}}(\cdot,\cdot)$ und $P^{Y|X=\cdot}(\cdot)$ – bedingte Erwartungen als Integrale bezüglich einer regulären Version der bedingten Verteilung – bedingte Dichten

Kapitel XI: Martingale in diskreter Zeit

A: Martingale, Supermartingale, Supermartingale: Random Walk: Trend und trendfreie Zufallsschwankungen – Dynkin-Formel in Markov-Ketten – stochastische Prozesse, Filtrationen, Adaptiertheit – Vorhersehbarkeit und Doob-Meyer-Zerlegung von Submartingalen – Martingale vom Typ 'sukzessive Prognosen an eine unendlich fernes Ziel' – Martingale in Verzweigungsprozessen

B. Stopzeiten, Stopsätze: Stopzeiten T – Vergangenheit vor T – Zustand eines Prozesses zur Zeit T – gestoppte Prozesse – Stopsatz für beschränkte Stopzeiten – Stopsatz in nichtnegativen Supermartingalen

C. Doob-Ungleichung und 'aufsteigende Überquerungen': Doob-Ungleichungen – Abschluß eines Martingals – Anzahl aufsteigender Überquerungen – Hauptsatz

D. Konvergenzsätze für Martingale, Submartingale und Supermartingale: P-fast sichere Konvergenz in Sub-und nichtnegativen Supermartingalen – Konvergenz fast sicher und in L^1 – Abschluss eines (Sub-, Super-) Martingals – gleichgradige Integrierbarkeit – Hauptsatz über gleichgradig integrierbare Martingale – Stopsatz für gleichgradig integrierbare Martingale

D. L^p-Ungleichungen und L^p-Martingale: Maximumsprozeß und L^p-Ungleichungen in nichtnegativen Submartingalen – Hauptsatz über L^p-Martingale

Kapitel XII: Der Konsistenzsatz von Kolmogorov

A. Produkträume und Konsistenzsatz: endlichdimensionale Randverteilungen – projektive Systeme – Konsistenzsatz

B. Anwendungen des Konsistenzsatzes: Produktmaße – Markovketten – Markovprozesse in stetiger Zeit – Markovhalbgruppe – Faltungshalbgruppen – Prozesse mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen (PIIS) – Brownsche Bewegung und Poisson-Prozeß im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen

Kapitel XIII: Stochastische Prozesse, Pfadeigenschaften, die Brownsche Bewegung

A. Versionen und Pfadeigenschaften: Versionen stochastischer Prozesse – stochastische Stetigkeit – Separabilität – Satz von Kolmogorov-Prohorov

B. Brownsche Bewegung und Poissonprozeß: d-dimensionale Standard-Brownsche Bewegung – Drift und Kovarianz – Wienermaß auf $(C, \mathcal{C})$ – Nichtdifferenzierbarkeit der Brownschen Pfade – Poisson- und Compound Poisson-Prozesse

C. Eigenschaften der eindimensionalen Brownschen Bewegung: Spiegelungsprinzip – level crossing Zeiten der Brownschen Bewegung – starke Markoveigenschaft (vorläufige Formulierung) – Satz vom iterierten Logarithmus für t=0 – Zeitumkehr – Satz vom iterierten Logarithmus für $t \to \infty$ – Rekurrenzeigenschaften – die Nullstellenmenge des Brownschen Pfades

D. Exkurs: Markoveigenschaften in stetiger Zeit: Stopzeiten in rechtsstetigen Filtrationen – Zustand eines Prozesses zur Zeit T – die starke Markoveigenschaft – der Prozeß nach T – Folgerungen für die Brownsche Bewegung – Folgerungen für den Poissonprozeß